

## §4.3 第1课时 用向量方法研究立体几何中的度量关系(一)

### 【学习目标】

1. 会用向量法求线线角、线面角.
2. 能正确区分向量夹角与所求线线角、线面角的关系.

### 【重点难点】

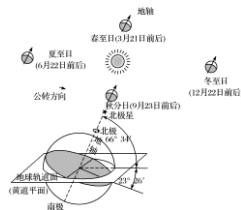
重点: 会用向量法求线线角、线面角.

难点: 能正确区分向量夹角与所求线线角、线面角的关系.

### 【导学流程】

#### 一、情境导入

地球绕太阳公转的轨道平面称为“黄道面”，黄道面与地球赤道面交角(二面角的平面角)为  $23^{\circ}26'$ . 黄道面与地球相交的大圆为“黄道”. 黄道及其附近的南北宽  $9^{\circ}$  以内的区域称为黄道带，太阳及大多数行星在天球上的位置常在黄道带内. 黄道带内有十二个星座，称为“黄道十二宫”. 从春分(节气)点起，每  $30^{\circ}$  便是一宫，并冠以星座名，如白羊座、狮子座、双子座等等，这便是星座的由来.



#### 二、探究新知

##### ◇探究一 两条直线所成的角

**问题 1** 若向量  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  分别为直线  $a$ ,  $b$  的方向向量, 则直线  $a$  与  $b$  所成的角  $\theta$  与两个方向向量所成的角  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$  有怎样的关系?

### 【知识梳理】

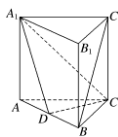
若向量  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  分别为直线  $a$ ,  $b$  的方向向量, 则直线  $a$  与  $b$  所成的角  $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , 且  $\theta$  与两个方向向量所成的角  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$  \_\_\_\_\_.

也就是说: 当  $0 \leq \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \leq \frac{\pi}{2}$  时,  $\theta =$  \_\_\_\_\_; 当  $\frac{\pi}{2} < \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \leq \pi$  时,  $\theta =$  \_\_\_\_\_.

故  $\cos \theta = |\cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle|$ .

**注意点:** 两直线的方向向量所成的角与两直线所成的角相等或互补.

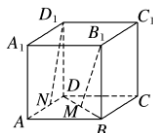
**例 1** 如图, 直三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中,  $D$  是  $AB$  的中点,  $AA_1 = AC = CB = \frac{\sqrt{2}}{2} AB$ .



(1)证明:  $BC_1 \parallel$  平面  $A_1CD$ ;

(2)求直线  $A_1D$  与  $BC_1$  所成角的余弦值.

**跟踪训练 1** 如图所示, 在正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中, 已知  $M, N$  分别是  $BD$  和  $AD$  的中点, 则  $B_1M$  与  $D_1N$  所成角的余弦值为( )



A.  $\frac{\sqrt{30}}{10}$

B.  $\frac{\sqrt{30}}{15}$

C.  $\frac{\sqrt{30}}{30}$

D.  $\frac{\sqrt{15}}{15}$

### ◇探究二 直线与平面所成的角

**问题 2** 观察如图直线  $l$  的一个方向向量  $\boldsymbol{l}$  与平面  $\alpha$  的一个法向量  $\boldsymbol{n}$  两者的夹角  $\langle \boldsymbol{l}, \boldsymbol{n} \rangle$  与直线  $l$  和平面  $\alpha$  所成的角  $\theta$  的关系是什么?

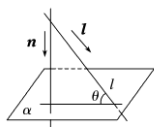


图 1

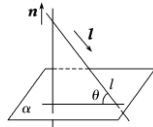


图 2

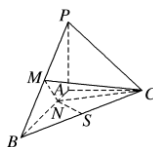
### 【知识梳理】

设向量  $\boldsymbol{l}$  为直线  $l$  的一个方向向量,  $\boldsymbol{n}$  是平面  $\alpha$  的一个法向量, 则直线  $l$  与平面  $\alpha$  所成的角  $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , 且  $\theta = \frac{\pi}{2} - \langle \boldsymbol{l}, \boldsymbol{n} \rangle$  或  $\theta = \langle \boldsymbol{l}, \boldsymbol{n} \rangle - \frac{\pi}{2}$ , 故  $\sin \theta = |\cos \langle \boldsymbol{l}, \boldsymbol{n} \rangle|$ .

**注意点:** (1)除了用向量求线面角外, 还可以根据直线与平面所成的角的定义, 确定出待求角, 转化为两直线所成的角求解即可.

(2)线面的正弦值  $\sin \theta = |\cos \langle \boldsymbol{l}, \boldsymbol{n} \rangle|$ .

**例 2** 如图所示, 在三棱锥  $P-ABC$  中,  $PA \perp$  平面  $ABC$ ,  $AB \perp AC$ ,  $PA = AC = \frac{1}{2}AB$ ,  $N$  为  $AB$  上一点,  $AB = 4AN$ ,  $M, S$  分别为  $PB, BC$  的中点.

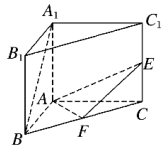


(1)证明:  $CM \perp SN$ ;

(2)求  $SN$  与平面  $CMN$  所成角的大小.

**延伸探究** 本例中的条件“ $S$  为  $BC$  的中点”改为“ $S$  是线段  $BC$  上一点，使得  $SN$  与平面  $CMN$  所成角的正弦值为  $\frac{1}{3}$ ”，其他条件不变，求  $SN$  的长.

**跟踪训练 2** 如图，在直三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中， $AB=AC=AA_1=2$ ， $\angle BAC=90^\circ$ ， $E, F$  依次为  $C_1C, BC$  的中点. 求  $A_1B$  与平面  $AEF$  所成角的正弦值.



### 三、随堂演练

1. 若异面直线  $l_1$  的方向向量与  $l_2$  的方向向量的夹角为  $150^\circ$ ，则  $l_1$  与  $l_2$  所成的角为( )  
 A.  $\frac{\pi}{6}$       B.  $\frac{5\pi}{6}$       C.  $\frac{\pi}{6}$  或  $\frac{5\pi}{6}$       D. 以上均不对
2. 若平面  $\alpha$  的一个法向量  $\boldsymbol{n}=(2,1,1)$ ，直线  $l$  的一个方向向量为  $\boldsymbol{a}=(1,2,3)$ ，则  $l$  与  $\alpha$  所成角的正弦值为( )  
 A.  $\frac{\sqrt{17}}{6}$       B.  $\frac{\sqrt{21}}{6}$       C.  $-\frac{\sqrt{21}}{6}$       D.  $\frac{\sqrt{21}}{3}$
3. 已知长方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中， $AB=1$ ， $AD=2$ ， $AA_1=2$ ，则异面直线  $AC_1$  与  $BD$  所成角的余弦值为( )  
 A. 0      B.  $\frac{\sqrt{5}}{5}$       C.  $\frac{\sqrt{5}}{3}$       D.  $\frac{\sqrt{6}}{3}$
4. 在正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中， $BB_1$  与平面  $ACD_1$  所成角的正弦值为\_\_\_\_\_.

### 四、课堂小结

1. 知识清单：(1)两条直线所成的角. (2)直线与平面所成的角.
2. 方法归纳：转化与化归.
3. 常见误区：混淆向量的夹角和空间角的关系，不能正确理解空间角概念、把握空间角范围.

### 五、布置作业（课时对点练）

#### 基础巩固

1. 两条异面直线  $l_1, l_2$  的方向向量分别是  $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ ，若  $\boldsymbol{v}_1$  与  $\boldsymbol{v}_2$  所成的角为  $\theta$ ，直线  $l_1, l_2$  所成的角为  $\alpha$ ，则( )  
 A.  $\alpha=\theta$       B.  $\alpha=\pi-\theta$       C.  $\cos \theta=|\cos \alpha|$       D.  $\cos \alpha=|\cos \theta|$
2. 平面  $\alpha$  的斜线  $l$  与它在这个平面上射影  $l'$  的方向向量分别为  $\boldsymbol{a}=(1,0,1)$ ， $\boldsymbol{b}=(0,1,1)$ ，则斜

线  $l$  与平面  $\alpha$  所成的角为( )

- A.  $30^\circ$       B.  $45^\circ$       C.  $60^\circ$       D.  $90^\circ$

3. 设直线  $l$  与平面  $\alpha$  相交，且  $l$  的方向向量为  $\mathbf{a}$ ， $\alpha$  的法向量为  $\mathbf{n}$ ，若  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{n} \rangle = \frac{2\pi}{3}$ ，则  $l$  与  $\alpha$  所成的角为( )

- A.  $\frac{2\pi}{3}$       B.  $\frac{\pi}{3}$       C.  $\frac{\pi}{6}$       D.  $\frac{5\pi}{6}$

4. 如图 1 所示，在长方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中， $AB=BC=2$ ， $AA_1=1$ ，则  $BC_1$  与平面  $BB_1D_1D$  所成角的正弦值为( )

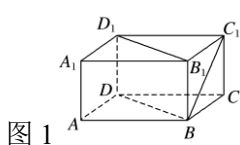


图 1

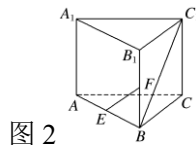


图 2

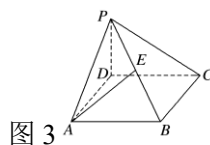


图 3

- A.  $\frac{\sqrt{6}}{3}$       B.  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$       C.  $\frac{\sqrt{5}}{5}$       D.  $\frac{\sqrt{10}}{5}$

5. 如图 2 所示，在三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中， $AA_1 \perp$  底面  $ABC$ ， $AB=BC=AA_1$ ， $\angle ABC=90^\circ$ ，点  $E$ ， $F$  分别是棱  $AB$ ， $BB_1$  的中点，则直线  $EF$  和  $BC_1$  的夹角是( )

- A.  $\frac{\pi}{6}$       B.  $\frac{\pi}{4}$       C.  $\frac{\pi}{3}$       D.  $\frac{\pi}{2}$

6. 如图 3 所示，在四棱锥  $P-ABCD$  中， $PD \perp$  平面  $ABCD$ ，四边形  $ABCD$  为正方形， $AB=2$ ， $E$  为  $PB$  的中点，若  $\cos \langle \vec{DP}, \vec{AE} \rangle = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，则  $PD$  等于( )

- A. 1      B.  $\frac{3}{2}$       C. 3      D. 2

7. 如图 4 所示，平面  $PAD \perp$  平面  $ABCD$ ，四边形  $ABCD$  为正方形， $\angle PAD=90^\circ$ ，且  $PA=AD$ ， $E$ ， $F$  分别是线段  $PA$ ， $CD$  的中点，若异面直线  $EF$  与  $BD$  所成的角为  $\alpha$ ，则  $\cos \alpha =$ \_\_\_\_\_.

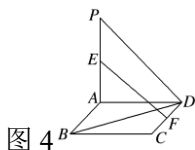


图 4

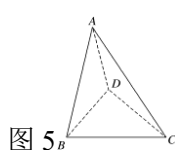


图 5

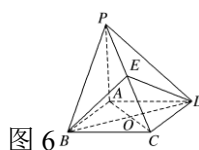


图 6

8. 在正四棱柱  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中， $AA_1=2AB$ ，则直线  $CD$  与平面  $BDC_1$  所成角的正弦值等于\_\_\_\_\_.

9. 如图 5 所示，在四面体  $ABCD$  中， $CA=CB=CD=BD=2$ ， $AB=AD=\sqrt{2}$ . 求异面直线  $AB$  与  $CD$  所成角的余弦值.

10. 如图 6，在四棱锥  $P-ABCD$  中，底面  $ABCD$  为菱形， $AB=PA$ ， $PA \perp$  底面  $ABCD$ ， $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$ ， $E$  是  $PC$  上任一点， $AC \cap BD = O$ .

(1) 求证：平面  $EBD \perp$  平面  $PAC$ ;

(2) 若  $E$  是  $PC$  的中点，求  $ED$  与平面  $EBC$  所成角的正弦值.

## 综合运用

11.如图7所示,已知两个正四棱锥 $P-ABCD$ 与 $Q-ABCD$ 的高分别为1和2, $AB=4$ ,则异面直线 $AQ$ 与 $PB$ 所成角的余弦值为( )

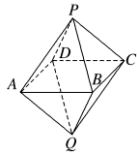


图7

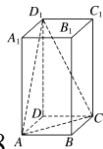


图8

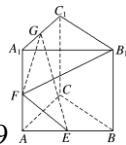


图9

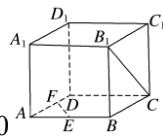


图10

A.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

B.  $\frac{\sqrt{3}}{6}$

C.  $\frac{\sqrt{3}}{9}$

D.  $\frac{\sqrt{3}}{4}$

12.如图8所示,在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,底面边长为2,直线 $CC_1$ 与平面 $ACD_1$ 所成角的正弦值为 $\frac{1}{3}$ ,则正四棱柱的高为( )

A. 2

B. 3

C. 4

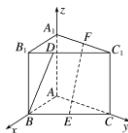
D. 5

13.如图9,正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的所有棱长都相等, $E, F, G$ 分别为 $AB, AA_1, A_1C_1$ 的中点,则 $B_1F$ 与平面 $GEF$ 所成角的正弦值为\_\_\_\_\_.

14.如图10所示,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,点 $E$ 为线段 $AB$ 的中点,点 $F$ 在线段 $AD$ 上移动,异面直线 $B_1C$ 与 $EF$ 所成角最小时,其余弦值为\_\_\_\_\_.

## 拓广探究

15. (多选)在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle BAC=90^\circ$ , $AB=AC=AA_1=2$ , $E, F$ 分别是 $BC, A_1C_1$ 的中点, $D$ 在线段 $B_1C_1$ 上,则下面说法中正确的有( )



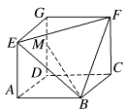
A.  $EF \parallel$  平面  $AA_1B_1B$

B. 若  $D$  是  $B_1C_1$  的中点, 则  $BD \perp EF$

C. 直线  $EF$  与平面  $ABC$  所成角的正弦值为  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

D. 直线  $BD$  与直线  $EF$  所成角最小时, 线段  $BD$  长为  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

16.已知几何体 $EFG-ABCD$ ,如图所示,其中四边形 $ABCD, CDGF, ADGE$ 均为正方形,且



边长均为1,点 $M$ 在棱 $DG$ 上.

(1)求证:  $BM \perp EF$ ;

(2)是否存在点 $M$ ,使得直线 $MB$ 与平面 $BEF$ 所成的角为 $45^\circ$ ?若存在,确定点 $M$ 的位置;若不存在,请说明理由.